2011

UNED

DISEÑOS DE INVESTIGACIÓN Y ANÁLISIS DE DATOS

[TEMA 7]

Diseños con más de dos grupos independientes. Análisis de varianza con dos factores completamente aleatorizados

Índice

7.1 Introducción

En los dos capítulos precedentes, se han estudiado dos diseños de más de dos grupos, uno con grupos completamente aleatorizados (cap. 5) y otro con grupos de medidas repetidas (cap. 6). En los primeros, los sujetos, definidos éstos en sentido amplio, se asignan aleatoriamente a cada uno de los niveles del factor, de modo que cada sujeto sólo recibe uno de los posibles tratamientos establecidos en el diseño. En los segundos, cada sujeto pasan por todos los tratamientos del diseño. El primer tipo de diseño se conoce como un diseño completamente aleatorizado, y el segundo de medidas repetidas. No obstante, este tipo de diseños de un solo factor aún teniendo una utilidad muy amplia, no permite abordar cuestiones complejas que se dan muy a menudo en el mundo "real", como son las posibles interacciones que se pueden dar cuando se manipulan varios factores a la vez y su incidencia sobre la variable objeto de estudio.

Para comprender lo anterior, supongamos que un departamento policial de una gran ciudad está interesado en mejorar la actitud de los nuevos oficiales hacia las minorías radicadas en la ciudad. Los responsables piensan que la mejora dependerá de la duración del curso que se les imparte sobre relaciones humanas, pero no descartan que también sea importante el lugar, en el sentido de zona de la ciudad donde se va a desarrollar posteriormente su labor policial. Para dar respuesta a esta inquietud, contactan con un consultor estadístico para que les diseñe la experiencia de modo que puedan posteriormente tomar decisiones a partir de los resultados. Al ser dos los factores o variables independientes (duración del curso y zona de la ciudad) que hay que considerar, el consultor elabora un diseño en el que por un lado juega con la zona de la ciudad donde se va a impartir y por el otro con la duración. En cada uno de los factores establece tres niveles: en el Factor A (zona) el curso se imparte o en un barrio de clase alta, o de clase media, o en un barrio económicamente deprimido, asociado a la clase con más número de grupos minoritarios; respecto de la duración del curso establecen tres niveles: de 5, de 10 o de 15 horas. Una vez elaborado el diseño, realiza una selección al azar de 45 policías que van a participar en los cursos y asigna 5 a cada combinación de zona y duración. Como variable dependiente se toma la puntuación alcanzada en un test, previamente validado, sobre actitudes hacía grupos minoritarios.

Con un diseño factorial de este tipo no sólo se pueden alcanzar conclusiones sobre la incidencia que tenga la duración del curso o la ubicación de la oficina policial donde se imparte, que en términos de los diseños experimentales se conoce como *efectos principales del factor*, sino que, además, se pueden llegar a conclusiones sobre si la duración y la zona están relacionados de algún modo, lo cual se conoce como *efectos de interacción* entre los factores. En general, un diseño factorial es más eficiente que varios diseños simples. Es más económico, en el sentido de que proporcionan más información, con menor número de sujetos esfuerzos y tiempo. En este capítulo vamos a estudiar la técnica de análisis de diseños de dos factores completamente aleatorizados y presentando las posibilidades de contrastes que estos diseños permiten.

7.2 Objetivos del tema

En este tema vamos a aprender los siguientes aspectos de un diseño factorial de 2 factores completamente aleatorizados:

- La disposición de los datos y la notación
- Identificar los diversos efectos que están presenten en el diseño (principales, de interacción y simples)
- Método de cálculo para el contraste de la significación estadística de estos efectos

- Métodos para el cálculo de los efectos simples presentes en el diseño
- Métodos de cálculo para las comparaciones por pares de los efectos simples significativos

7.3 ¿Qué información proporciona un diseño factorial?

Pensemos en el diseño expuesto en la introducción. Tal como está planteado, los responsables de la formación de los oficiales de policía pueden contrastar, de manera independiente, el efecto que tiene la zona donde se imparte el curso, al margen del tiempo. Para ello sólo se tendrían en cuenta los datos de los 15 oficiales asignados a cada de las zonas (cinco por cada uno de los tres grupos de tiempo) –ver Figura 7.1-. También podrían evaluar el efecto que tiene la duración del curso, al margen de la zona, para lo cual sólo se tendrían en cuenta los datos de los 15 oficiales asignados a cada tiempo de duración de curso, con independencia de la zona en que se imparten. Con esto, estaríamos contrastando los denominados *efectos principales*, que serán tantos como factores hay implicados en el diseño.

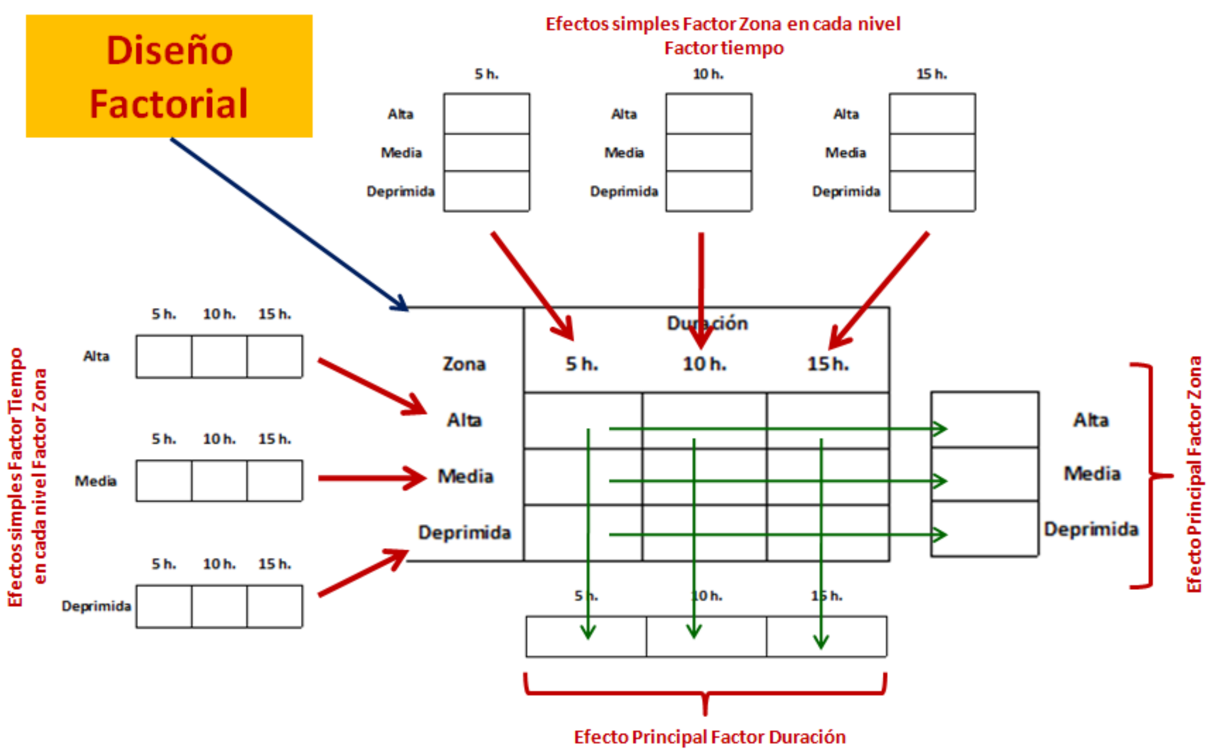


Figura 7.1 *Posibles contrastes en un diseño factorial de dos factores*

Además de estos efectos principales (tantos como factores hay), cuyos contrastes no difieren del ya estudiado en el capítulo 5, hay un conjunto de contrastes más focalizados de cada factor con cada nivel del otro factor, que representan los llamados *efectos simples*, en el sentido de que se contrastan los tratamientos de un factor en cada nivel del otro factor. Aplicado al ejemplo de la introducción, un efecto simple es el de la zona en que se imparte el curso cuando esté sólo dura 5 horas. Otro efecto simple es el del tiempo de duración del curso cuando éste se imparte en una zona de clase media. En total, hay tantos efectos simples como la suma de los niveles de cada factor. En cada uno de estos contrastes sólo entran en juego los sujetos asignados aleatoriamente a cada una de los tres niveles de un factor condicionado a un nivel del otro factor. Para el caso del ejemplo de la introducción, cada nivel estaría compuesto por 5 oficiales.

Un tercer y último efecto es el que se produce por los cruces de los tratamientos (o niveles) de cada uno de los factores, que está relacionado con los denominados efectos simples y que se conoce como *efecto de interacción*. Aunque luego lo veremos con datos, imaginemos, en el ejemplo de las actitudes ante las minorías por parte de los oficiales policiales, que para el caso de la zona alta, la actitud de los oficiales sube conforme aumenta la duración del curso, y lo mismo sucede para las otras zonas. Si este fuera el caso, el comportamiento de la variable dependiente estaría relacionado sólo por la duración y sería independiente de la zona. En este caso, las líneas del gráfico de medias de la VD respecto de la duración, para cada una de las zonas, serían más o menos paralelas. Por el contrario, si se observaran comportamientos diferentes de la VD respecto de la duración en función de la zona, las líneas del gráfico de medias tenderían a cruzarse, o se cruzarían de hecho, en algún lugar del plano, tal como de hecho sucede con los datos del ejemplo que veremos en el próximo epígrafe. En este último caso, diríamos que se ha producido una interacción (que habría que confirmar analíticamente como veremos más adelante).

La presencia de interacción de un diseño factorial obliga a ir más allá de las conclusiones que se sacan a partir de los efectos principales, pues éstos, para cada factor, deben ser interpretados teniendo en cuenta los niveles del otro factor. Hay muchas definiciones de interacción, todas ellas equivalentes pero con énfasis en distintos aspectos de la misma. En el Cuadro 7.1 hacemos una relación de éstas para hacerse una idea de la importancia que se le concede a este concepto (interacción entre factores).

Cuadro 7.1 *Definiciones sobre el concepto de interacción en un diseño factorial*

- Una interacción está presente cuando los efectos de una variable independiente sobre la conducta objeto de estudio cambia en los diferentes niveles de la otra variable independiente (este cambio, no significa que una variable independiente influya sobre la otra; de hecho, las variables independientes son, valga la redundancia, independientes entre sí).
- Una interacción está presente cuando los patrones de diferencias asociados con una variable independiente cambia con los diferentes niveles de la otra variable independiente. Para entender esto, supongamos que en un diseño experimental tenemos que uno de los factores está compuesto por tres niveles, un grupo control y dos tratamientos experimentales. Es posible que consideremos realizar comparaciones entre los dos tratamientos experimentales y entre el control y cada uno de los tratamientos, o entre el control y una combinación de los tratamientos. Si está presente una interacción, el patrón de estas diferencias no será el mismo en cada nivel del otro factor.
- Una interacción está presente cuando los efectos simples de una variable independiente no son los mismos en todos los niveles de la otra variable independiente.
- Una interacción está presente cuando los efectos principales de una variable independiente no son representativos de los efectos simples de esa misma variable.
- Una interacción está presente cuando las diferencias entre las medias de las celdas que representan el efecto de un factor en algún nivel del otro factor no son iguales a las correspondientes diferencias en otro nivel de este factor
- Una interacción está presente cuando los efectos de una de las variables independientes están condicionalmente relacionados a los niveles de la otra variable independiente (Cohen, 1983).

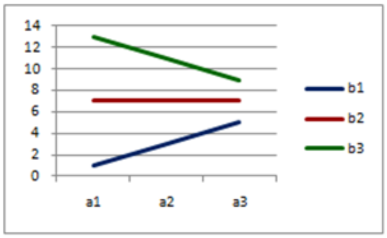
- Una interacción está presente cuando una variable independiente no tiene un efecto constante en todos los niveles de la otra variable independiente (Pedhazur, 1982).

El estudiante puede observar que hay diferencias más semánticas que conceptuales o estadísticas en estas definiciones, y una vez estudiado en profundidad el capítulo le invitamos a dar su propia definición de este efecto. En la diversos gráficos de la Figura 7.2 se proponen algunos ejemplos de datos de diseños factoriales 3x3 (esta es la forma de representar simbólicamente un diseño de dos factores, ya que solo hay dos dígitos, y cada uno de ellos compuesto de tres niveles), donde se muestran gráficos de medias de tratamientos, dos de ellos con interacción y uno sin interacción. Las medias de los tratamientos están representadas encima de cada gráfica.

A modo de resumen y antes de empezar con el ejemplo numérico, la notación y la exposición del modelo estadístico, veremos algunas cuestiones básicas en un diseño factorial.

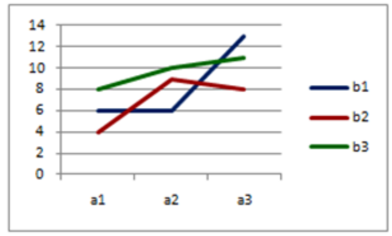
- Un diseño factorial consiste en un conjunto de diseños simples de un factor en el cual la misma variable independiente es manipulada en combinación con una segunda variable independiente.
- Los efectos simples de una variable independiente se refieren a las diferencias entre las medias para cada uno de los componentes del experimento. Si tenemos una factor *A*, las diferencias observadas en el nivel b_1, del factor B, se denominan como efectos simples del factor *A* en el nivel b_1.
- Las interacciones se definen en términos de las comparaciones entre un conjunto de efectos simples. Están presentes cuando se encuentra que los efectos simples asociados con una variable independiente no son los mismos en todos los niveles de la otra variable independiente.
- Los efectos principales de una variable independiente o factor se refieren a los efectos promedio totales de una variable y se obtiene combinando el conjunto completo de componentes experimentales presentes en ese factor.

	a_1	a_2	a_3
b_1	1	3	5
b_2	7	7	7
b_3	13	11	9



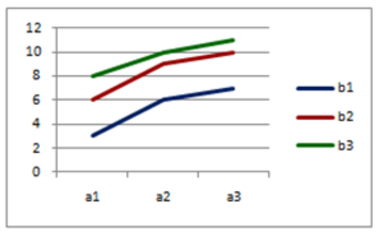
(a) Interacción sin cruce

	a_1	a_2	a_3
b_1	6	6	13
b_2	4	9	8
b_3	8	10	11



(a) Interacción con cruce

	a_1	a_2	a_3
b_1	3	6	7
b_2	6	9	10
b_3	8	10	11



(a) Sin interacción

Figura 7.2 *Gráficos con interacción y sin interacción entre factores*

7.4 Reglas para el cálculo de los efectos principales y del efecto de interacción

En el capítulo 5 se ha explicado el procedimiento de cálculo para los efectos de los tratamientos de un factor a partir de las llamadas razones básicas, y a partir de éstas, las sumas de cuadrados (SC), las medias cuadráticas (MC), y el valor del estadístico F. También se explicó cómo la variabilidad total del sistema (la suma de cuadrados total) se puede partir en dos sumas de cuadrados independientes; por una parte las que reflejan la variabilidad entre los tratamientos (suma de cuadrados entre-grupos) y por otra la que refleja la variabilidad dentro de los tratamientos (suma de cuadrados intra-grupos). En los diseños factoriales de 2 factores (que denotaremos genéricamente como los factores A y B) se sigue un patrón de análisis similar, pero en esta ocasión la suma de cuadrados entre-grupos se divide a su vez en tres componentes que reflejan: (1) la suma de cuadrados entre tratamientos del factor A (SC_A), que refleja los efectos principales del factor A; (2) la suma de cuadrados entre tratamientos del factor B (SC_B), que refleja los efectos principales del factor B; y (3) la suma de cuadrados que representa la interacción entre A y B (SC_{AxB}). En este capítulo sólo consideraremos los diseños equilibrados, es decir aquellos que tienen el mismo número de casos o sujetos por cada tratamiento (en este caso sería mejor decir cruce por tratamientos).

7.4.1 Diseño y notación

Los datos en un diseño factorial de dos factores se pueden representar en una tabla de doble entrada (como la representada en la Figura 7.1) o en forma de columnas con las dos primeras filas representando los diferentes combinaciones de los niveles de los factores. En las diferentes tablas representadas en la Figura 7.3 se pueden ver estas dos configuraciones en que pueden presentarse los datos de un diseño de 2 factores. Para un diseño como el planteado en la introducción, con 2 factores (3 niveles por factor y 5 sujeto en cada cruce de tratamiento) diríamos que tenemos un diseño factorial 3x3 (al tener 3 niveles cada factor, el número de tratamientos es 9, es decir, el producto de los niveles de los factores 3 x 3 = 9).

Una observación genérica se representa como Y_{ijk}, siendo i el nivel genérico del factor A, j el nivel genérico del factor B, y k la observación genérica dentro del tratamiento AB_{ij}. A partir de esta matriz de datos, donde se representan los valores de la variable dependiente dentro de cada tratamiento ($AB_{i,j}$), se obtienen las sumas de los tratamientos de cada factor (que en la figura se designan como sumas marginales -A_i para el factor A, y B_j para el factor B-) y la suma total de todas las observaciones representada por T. En la secuencia de tablas de la Figura 7.3 se reflejan las sumas básicas que hay que realizar, a partir de las cuales se obtienen las denominadas razones básicas y posteriormente las sumas de cuadrados.

Diseño Factorial de 2 factores

		Factor A		
		a_1	a_2	a_3
Factor B	b_1	n = 5	n = 5	n = 5
	b_2	n = 5	n = 5	n = 5
	b_3	n = 5	n = 5	n = 5

Matriz de Datos

Combinaciones de tratamientos

a_1 b_1	a_1 b_2	a_1 b_3	a_2 b_1	a_2 b_2	a_2 b_3	a_3 b_1	a_3 b_2	a_3 b_3
$Y_{1,1,1}$	$Y_{1,2,1}$	$Y_{1,3,1}$	$Y_{2,1,1}$	$Y_{2,2,1}$	$Y_{2,3,1}$	$Y_{3,1,1}$	$Y_{3,2,1}$	$Y_{3,3,1}$
$Y_{1,1,2}$	$Y_{1,2,2}$	$Y_{1,3,2}$	$Y_{2,1,2}$	$Y_{2,2,2}$	$Y_{2,3,2}$	$Y_{3,1,2}$	$Y_{3,2,2}$	$Y_{3,3,2}$
$Y_{1,1,3}$	$Y_{1,2,3}$	$Y_{1,3,3}$	$Y_{2,1,3}$	$Y_{2,2,3}$	$Y_{2,3,3}$	$Y_{3,1,3}$	$Y_{3,2,3}$	$Y_{3,3,3}$
$Y_{1,1,4}$	$Y_{1,2,4}$	$Y_{1,3,4}$	$Y_{2,1,4}$	$Y_{2,2,4}$	$Y_{2,3,4}$	$Y_{3,1,4}$	$Y_{3,2,4}$	$Y_{3,3,4}$
$Y_{1,1,5}$	$Y_{1,2,5}$	$Y_{1,3,5}$	$Y_{2,1,5}$	$Y_{2,2,5}$	$Y_{2,3,5}$	$Y_{3,1,5}$	$Y_{3,2,5}$	$Y_{3,3,5}$
$AB_{1,1}$	$AB_{1,2}$	$AB_{1,3}$	$AB_{2,1}$	$AB_{2,2}$	$AB_{2,3}$	$AB_{3,1}$	$AB_{3,2}$	$AB_{3,3}$

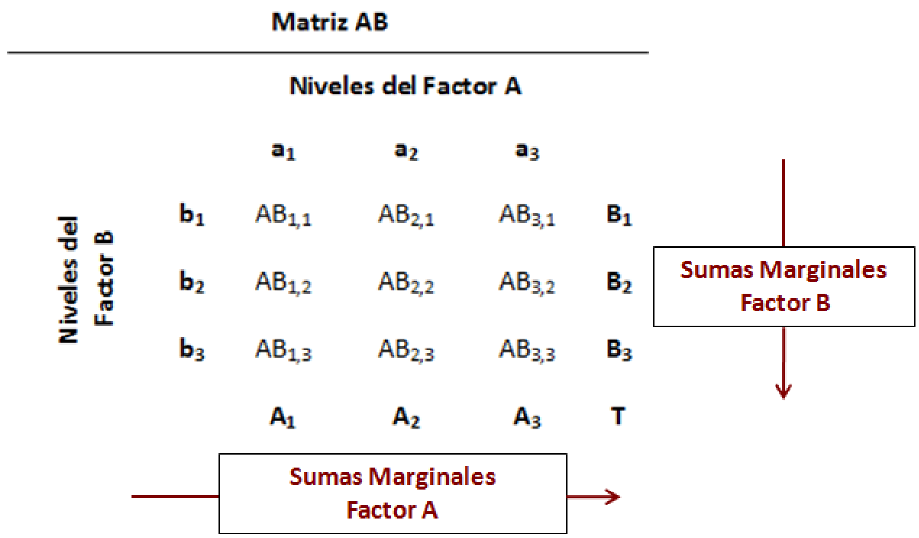


Figura 7.3 *Disposición de los datos en un diseño factorial para su ulterior análisis*

A partir de los sumatorios, también se pueden obtener las medias generales para cada factor, para el total del sistema y para la interacción, mediante un sencillo juego de fórmulas:

$\bar{Y}_T = \frac{T}{(a)(b)(n)}$	$\bar{Y}_{AB} = \frac{AB}{(n)}$
$\bar{Y}_A = \frac{A}{(b)(n)}$	$\bar{Y}_B = \frac{B}{(a)(n)}$

7.4.2 Variabilidad del sistema

En el capítulo 5 ya hemos tenido ocasión de comprobar que la suma de cuadrados total es igual a la suma de cuadrados entre-grupos (o tratamientos) y la suma de cuadrados intra-grupo:

$$\boldsymbol{SC_T = SC_E + SC_I} \qquad \text{Ecuación 7.1}$$

siendo SC_T la Suma de Cuadrados Total, SC_E la Suma de Cuadrados entre-grupos y SCI la Suma de Cuadrados intra-grupos. Esta igualdad se mantiene en un diseño factorial aunque con algunas consideraciones sobre en qué componentes está basada ahora la suma de cuadrados entre-grupos (SC_E).

En un diseño de un factor, SC_E está basada en las desviaciones de las medias de cada tratamiento respecto la media total, es decir, siendo A el factor, y prescindiendo de los sumatorios propios en el cálculo de las sumas de cuadrados, SC_E está basada en las desviaciones $\bar{Y}_{A_i} - \bar{Y}_T$. Sin embargo, en un diseño factorial de dos factores, SC_E está basada en las desviaciones de las medias de cada tratamiento conjunto **AB**, respecto de la media total, es decir, $\bar{Y}_{AB_{ij}} - \bar{Y}_T$.

Si pensamos en un grupo de sujetos que reciben una combinación de tratamientos A y B, la desviación respecto de la media total del sistema puede estar influida por tres componentes: el Factor A, el Factor B, y la interacción entre A y B, y cada una de estas influencias puede ser expresada de la siguiente forma (véase Ecuación 7.2):

$$\bar{Y}_{AB_{ij}} - \bar{Y}_T = (\bar{Y}_{A_i} - \bar{Y}_T) + \left(\bar{Y}_{B_j} - \bar{Y}_T\right) + \left(\bar{Y}_{AB_{ij}} - \bar{Y}_{A_i} - \bar{Y}_{B_j} + \bar{Y}_T\right)$$ Ecuación 7.2

A partir de aquí, y con leves transformaciones algebraicas, se concluye que la desviación de cualquier puntuación individual respecto de la media total del conjunto de datos del diseño se puede dividir en cuatro componentes de desviación (ver Ecuación 7.3):

$$Y_{ijk} - \bar{Y}_T = (\bar{Y}_{A_i} - \bar{Y}_T) + \left(\bar{Y}_{B_j} - \bar{Y}_T\right) + \left(\bar{Y}_{AB_{ij}} - \bar{Y}_{A_i} - \bar{Y}_{B_j} + \bar{Y}_T\right) + \left(Y_{ijk} - \bar{Y}_{AB_{ij}}\right)$$ Ecuación 7.3

El primer componente es el relacionado con los efectos del tratamiento A_i, el segundo es el relacionado con los efectos del tratamiento B_j, el tercero es el efecto de la interacción entre ambos factores, y el cuarto es la desviación de la puntuación del sujeto respecto del tratamiento que le ha sido asignado aleatoriamente. A partir de aquí, solo quedaría realizar los sumatorios y elevar al cuadrado para obtener las correspondientes sumas de cuadrados para el análisis de varianza

Una vez detectadas las fuentes de variabilidad de cada observación, tres de ellas relacionadas con los tratamientos (que expresarían, además del error experimental, las posibles diferencias que pudieran darse entre tratamientos), y una relacionada con su propio grupo (que sería la expresión del error experimental, únicamente), fuentes que denominaremos, siguiendo el esquema de capítulos anteriores, *A*, *B*, *AB* y *S/AB*, tenemos que determinar los grados de libertad para cada una de estas fuentes. Para los efectos principales se sigue la misma regla del número de tratamientos menos 1. Por tanto (véase la Ecuación 7.4),

$$gl_A = a - 1 \qquad y \qquad gl_B = b - 1$$ Ecuación 7.4

Los grados de libertad de la interacción es el resultado del producto de los grados de libertad asociados con los factores A y B.

$$gl_{AB} = (a-1)(b-1)$$ Ecuación 7.5

Los grados de libertad debidos al error experimental, es decir, a las diferencias individuales dentro de cada tratamiento, y habida de que en cualquier de ellos los grados de libertad son n-1, los asociados al error son (véase Ecuación 7.6):

$$gl_{S/AB} = (a)(b)(n-1)$$ Ecuación 7.6

7.4.3 Proceso de cálculo del ANOVA de dos factores

Comenzaremos con la tabla donde se resumen (Tabla 7.1) las razones básicas para realizar el cálculo posterior de las sumas de cuadrados, basadas en los sumatorios reflejadas en la tabla de la matriz AB en la Figura 7.3

Tabla 7.1. *Cálculo de las razones básicas*

Cantidad Básica	**Sumas y cuadrados implicados**	**Razón básica**	**Código para representar esta razón**
A	$\sum A^2$	$\frac{\sum A^2}{(b)(n)}$	[A]
B	$\sum B^2$	$\frac{\sum B^2}{(a)(n)}$	[B]
AB	$\sum (AB)^2$	$\frac{\sum (AB)^2}{(n)}$	[AB]
Y	$\sum Y^2$	$\sum Y^2$	[Y]
T	T^2	$\frac{T^2}{(a)(b)(n)}$	[T]

A partir de estas razones, obtener las sumas de cuadrados es sencillo. En la Tabla 7.2, se puede ver la tabla resumen del ANOVA con las fórmulas de cómputo a partir de las razones básicas. Para ayudar al estudiante, la fórmula de cómputo completa se presenta sólo una vez, que posteriormente es designada únicamente por el código de la letra entre corchetes referido en la última columna de la Tabla 7.1. Los totales para SC_A son las sumas marginales del factor A, los totales para SC_B son las sumas marginales del factor B, ambos representados en la matriz AB de la figura 7.3, y las sumas para la razón [AB] se obtienen directamente de los totales de la matriz de datos de la misma figura.

Tabla 7.2 *Fórmulas de cálculo y tabla del ANOVA de dos factores*

Fuente de Variación	Fórmula cálculo Sumas de Cuadrados	grados de libertad	Medias Cuadráticas	F
A	$SC_A = \frac{\sum A^2}{(b)(n)} - \frac{T^2}{(a)(b)(n)}$	a - 1	$MC_A = \frac{SC_A}{gl_A}$	$\frac{MC_A}{gl_A}$
B	$SC_B = \frac{\sum B^2}{(a)(n)} - [T]$	b – 1	$MC_B = \frac{SC_B}{gl_B}$	$\frac{MC_B}{gl_B}$
A x B	$SC_{AB} = \frac{\sum (AB)^2}{(n)} - [A] - [B] + [T]$	(a – 1)(b – 1)	$MC_{AB} = \frac{SC_{AB}}{gl_{AB}}$	$\frac{MC_{AB}}{gl_{AB}}$
Intra (S/AB)	$SC_{Intra} = \sum Y^2 - [AB]$	(a)(b)(n-1)	$MC_{S/AB} = \frac{SC_{S/AB}}{gl_{S/AB}}$	
Total	$SC_T = [Y] - [T]$	(a)(b)(n)-1		

7.4.4 Desarrollo del ANOVA de 2 factores con un ejemplo

Vamos ahora a desarrollar la técnica con los datos del ejemplo referido en la introducción sobre mejora de las actitudes hacia las minorías por parte de jóvenes oficiales de policía. En total hay 45 observaciones repartidas entre los 9 tratamientos, que son los que se producen por el cruce de los 3 tratamientos de cada factor. Llamaremos factor A a las zonas donde se realiza el curso, con tres niveles, *alta*, *media* y *deprimida* (a=3) y factor B a la duración del curso, también con tres niveles, *5*, *10* y *15 horas* (b=3). Las puntuaciones de los sujetos participantes en la experiencia se muestran en la Tabla 7.3, con las sumas totales de las puntuaciones de cada tratamiento en la fila inferior de la tabla, bajo la denominación Matriz de Datos, y en la tabla que llamamos Matriz AB se presentan los resultados de los sumas para cada tratamiento, los marginales y la suma total.

Tabla 7.3 *Datos del ejemplo numérico*

Matriz de Datos

	a_1 b_1	a_1 b_2	a_1 b_3	a_2 b_1	a_2 b_2	a_2 b_3	a_3 b_1	a_3 b_2	a_3 b_3
	24	44	38	30	35	26	21	41	42
	33	36	29	21	35	32	18	39	52
	37	25	28	39	27	36	10	50	53
	29	27	47	26	31	46	31	36	49
	42	43	48	34	22	45	20	34	64
Suma	165	175	190	150	150	185	100	200	260
Media	33	35	38	30	30	37	20	40	52
Desv.Típic	6.229	7.874	8.509	6.229	4.980	7.642	6.723	5.550	7.127

Matriz AB

	Factor A			
Factor B	**a_1 (zona alta)**	**a_2 (zona media)**	**a_3 (zona deprimida)**	**Suma**
b_1 (5 h.)	165	150	100	415
b_2 (10 h.)	175	150	200	525
b_3 (15 h.)	190	185	260	635
Suma	530	485	560	1575

Los resultados de las razones básicas a partir de estos datos son:

$$[\boldsymbol{T}] = \frac{1575^2}{(3)(3)(5)} = \mathbf{55125}$$

$$[\boldsymbol{Y}] = 24^2 + 33^2 + 37^2 + \cdots + 53^2 + 49^2 + 64^2 = \mathbf{60265}$$

$$[\boldsymbol{A}] = \frac{530^2 + 485^2 + 560^2}{(3)(5)} = \mathbf{55315}$$

$$[\boldsymbol{B}] = \frac{415^2 + 525^2 + 635^2}{(3)(5)} = \mathbf{56738,333}$$

$$[\boldsymbol{AB}] = \frac{165^2 + 150^2 + \cdots + 185^2 + 260^2}{(5)} = \mathbf{58155}$$

A partir de estos valores se calculan las sumas de cuadrados

$$\boldsymbol{SC_A} = [A] - [T] = 55315 - 55125 = \mathbf{190}$$

$$\boldsymbol{SC_B} = [B] - [T] = 56738{,}333 - 55125 = \mathbf{1613,333}$$

$$\boldsymbol{SC_{AB}} = [AB] - [A] - [B] + [T] = 58155 - 55315 - 56738{,}333 + 55125 = \mathbf{1226,667}$$

$$\boldsymbol{SC_{S/AB}} = [Y] - [AB] = 60265 - 58155 = \mathbf{2110}$$

$$\boldsymbol{SC_T} = [Y] - [T] = 60265 - 55125 = \mathbf{5140}$$

Se comprueba que $\boldsymbol{SC_T = SC_A + SC_B + SC_{AB} + SC_{S/AB}}$.

$$5140 = 190 + 1613.333 + 1226.667 + 2110$$

Como los cálculos de los grados de libertad y las medias cuadráticas son sencillos, y además ya se han visto en el capítulo 5, escribimos en la Tabla 7.4, el resumen del ANOVA con todos los resultados; los asteriscos a derecha del valor del estadístico F indican que la fuente de variabilidad es significativa (para ese factor o interacción, se rechaza la hipótesis nula).

Tabla 7.4. *Resumen del Análisis de Varianza*

Fuente de Variación	**Sumas de Cuadrados**	**grados de libertad**	**Medias Cuadráticas**	**F**
A	190	2	95	1,621
B	1613,333	2	806,667	13,763*
A x B	1226,667	2x2= 4	306,667	5,232*

Intra (S/AB)	2110	3x3x(5-1) =36	58,611[1]	
Total	5140			

Los resultados ponen de manifiesto que los efectos principales del factor B (duración del curso) y de la interacción son significativos. Conviene, no obstante, representar gráficamente las medias de los tratamientos cada uno de los factores, para ver los efectos principales, y también las medias de los tratamientos para ver el sentido de la interacción a través de la representación de los efectos simples. En las gráficas de las Figuras 7.4 (a) (b) (c) y (d), se representan estos valores mediante diagramas de líneas.

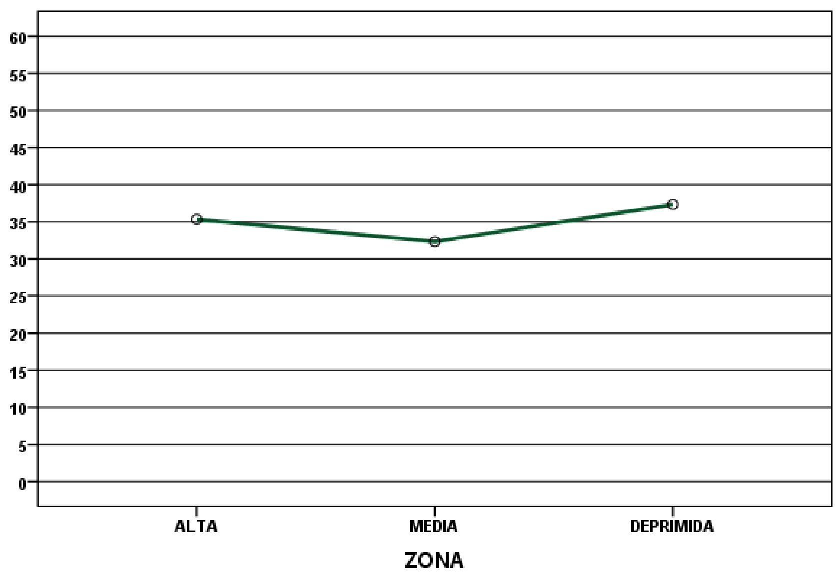


Figura 7.4 (a) *Medias efectos principales factor Zona*

[1] Al mismo resultado se llega sumando las varianzas de todos los tratamientos y dividiendo el resultado por el de tratamientos. Para los datos del ejemplo $MC_{S/AB} = \frac{(6,964)^2+(8,803)^2+\cdots+(6,205)^2+(7,969)^2}{(3)(3)} = 58,611$

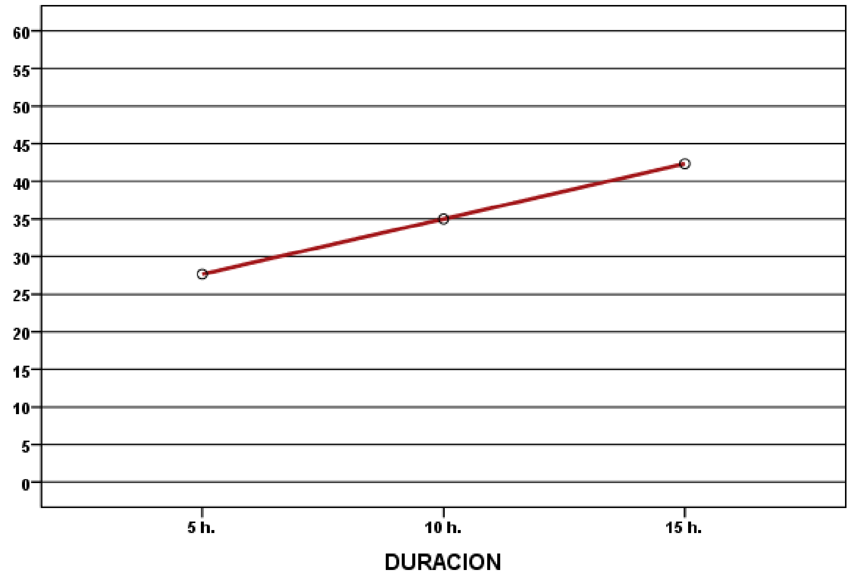


Figura 7.4 (b) *Medias efectos principales factor Duración del curso*

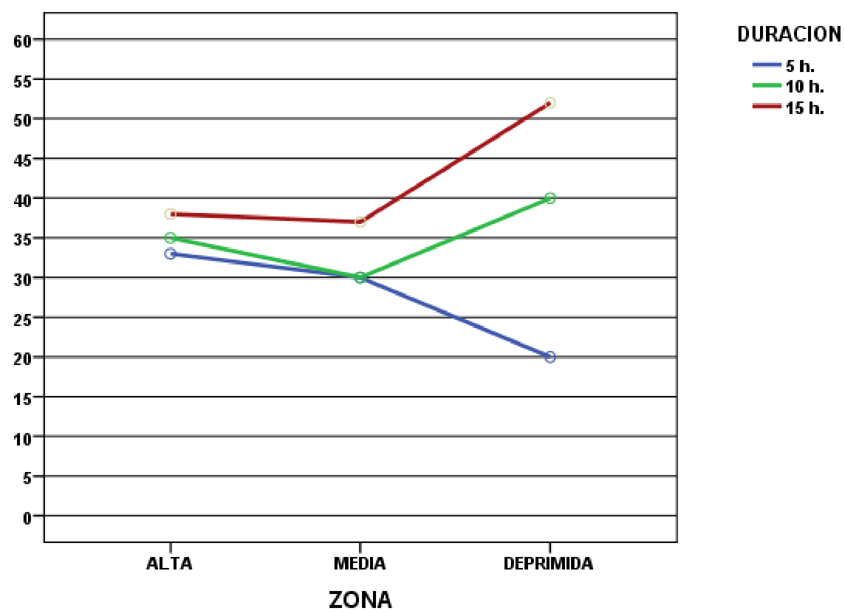


Figura 7.4 (c) *Medias de los efectos simples del factor Zona respecto de los niveles del factor Duración del curso*

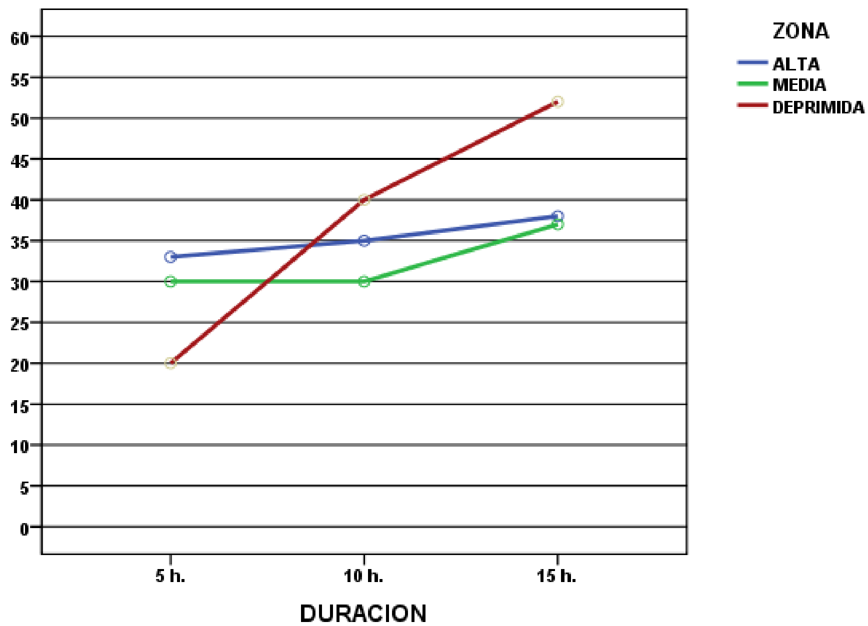


Figura 7.4 (c) *Medias de los efectos simples del factor duración del curso respecto de los niveles del factor Zona*

A partir de los gráficos es posible anticipar, antes de proceder al análisis de lascomparaciones, por qué la interacción resulta significativa. En todos los gráficos se ha puesto la misma escala de valores en el eje de ordenadas (de 0 a 60) para facilitar la comparación entre ellos. Observe el estudiante los gráficos 7.3 (a) y 7.3 (d), que representan, el primero, los efectos principales del factor Zona, y el segundo, los efectos simples del factor Zona en función de los tres niveles del factor Duración. Como demuestra la tabla del ANOVA, los tratamientos del factor Zona no resulta ser estadísticamente diferentes, y esto es lo que debería suceder en cada uno de los tres efectos simples. Sin embargo, el gráfico (d) muestra que esta no diferencia no parece darse en todas los niveles del otro factor. Quizás no haya diferencias entre zonas en los niveles de 5 y 10 horas, pero sí se observan diferencias en el nivel de 15 horas, entre, por un lado, las zonas alta y media (con una puntuación media de 38 y 37, respectivamente), y por otro la zona deprimida (con una puntuación media de 52).

En el caso del factor Duración es posible que haya también un efecto de interacción, pero justo en sentido contrario al del factor Zona. En este caso, la prueba F resulta significativa, y las comparaciones múltiples señalan que hay diferencias entre los tres niveles de duración (sugerimos al estudiante que lo compruebe con la prueba de Scheffé, explicada en el capítulo 5). Si observamos el gráfico 7.3 (c), se ve claramente que estas diferencias no se manifiestan en todos los niveles del factor Zona. En el nivel zona alta, las puntuaciones medias son muy similares, y en el nivel zona media, las puntuaciones de 5 y 10 horas son idénticas, siendo algo mayor la puntuación media para 15 horas, diferencia que sí puede resultar significativa. Por último, en el nivel zona deprimida es posible que sí se registren diferencias entre las puntuaciones promedio para las tres zonas. Posteriormente veremos si estas conjeturas que hemos realizado sobre las gráficas tienen respaldo estadístico al realizar los contrastes sobre los efectos simples.

7.5 El modelo estadístico

El modelo estadístico que subyace en un diseño factorial de 2 factores completamente aleatorizados es un modelo lineal en el cual se especifica los componentes que contribuyen a explicar cualquier puntuación Y_{ijk}. Este modelo se puede expresar del siguiente modo:

$$Y_{ijk} = \mu_T + \alpha_i + \beta_j + (\alpha\beta)_{ij} + \varepsilon_{ijk} \qquad \text{Ecuación 7.7}$$

Donde:

- μ_T es la media total de la población
- α_i es el promedio del efecto del tratamiento en el nivel a_i ($\alpha_i = \mu_i - \mu_T$)
- β_j es el promedio del efecto del tratamiento en el nivel b_j ($\beta_j = \mu_j - \mu_T$)
- $(\alpha\beta)_{ij}$ es el efecto de la interacción en la celda a_ib_j ($(\alpha\beta)_{ij} = \mu_{ij} - \mu_i - \mu_j + \mu_T$)
- ε_{ijk} es el error experimental asociado con cada puntuación ($\varepsilon_{ijk} = Y_{ijk} - \mu_{ij}$)

Las hipótesis estadísticas con este modelo se pueden expresar de la siguiente forma:

Efectos Principales Factor A	**H_0: Todos los $\alpha_i = 0$**
	H_1: No todos los $\alpha_i = 0$
Efectos Principales Factor B	**H_0: Todos los $\beta_j = 0$**
	H_1: No todos los $\beta_j = 0$
Interacción A x B	**H_0: Todos los $\alpha\beta_{ij} = 0$**
	H_1: No todos los $\alpha\beta_{ij} = 0$

Los valores esperados de las medias cuadráticas calculados en el ANOVA, *E(MC)*, se refieren a los factores que contribuyen al valor promedio de cada media cuadrática obtenida mediante sucesivos muestreos aleatorios de una población dada. En este diseño los valores son

$$E(MC_A) = \sigma^2_{error} + (b)(n)(\theta^2_A) \qquad \text{Ecuación 7.8}$$

$$E(MC_B) = \sigma^2_{error} + (a)(n)(\theta^2_B) \qquad \text{Ecuación 7.9}$$

$$E(MC_{AxB}) = \sigma^2_{error} + (n)(\theta^2_{AxB}) \qquad \text{Ecuación 7.10}$$

En el modelo de efectos fijos, que es el modelo más utilizado en el ámbito de las ciencias sociales, los tres valores de θ^2 se definen de la siguiente forma:

$$\theta_A^2 = \frac{\sum \alpha_i^2}{a-1}$$ Ecuación 7.11

$$\theta_B^2 = \frac{\sum \beta_j^2}{b-1}$$ Ecuación 7.12

$$\theta_{AxB}^2 = \frac{\sum\left(\alpha\beta_{ij}^2\right)}{(a-1)(b-1)}$$ Ecuación 7.13

Siendo el valor esperado del error

$$E\left(MC_{S/AxB}\right) = \sigma_{error}^2$$ Ecuación 7.14

Como en el diseño de un factor, la lógica del análisis es la formación de las razones

$$\frac{MC_{efecto}}{MC_{error}}$$ Ecuación 7.15

en donde

$$E\left(MC_{efecto}\right) = error + efecto$$

$$E(MC_{error}) = error$$

Bajo la hipótesis nula, el componente de la varianza que refleja el efecto será cero y por tanto

$$E\left(MC_{efecto}\right) = E(MC_{error})$$

Y la razón

$$\frac{MC_{efecto}}{MC_{error}}$$

será igual a la unidad excepto variaciones debidas al azar. Si la hipótesis nula es falsa, el valor de MC_{efecto} será significativamente superior a MC_{error} y, por consiguiente, la razón entre ambas medias cuadráticas será superior a la unidad (tanto más cuanto mayor sea la varianza aportada por el efecto y más pequeña sea MC_{error}).

Esta razón se distribuye según la distribución de probabilidad F con los grados de libertad de las MC del numerador y del denominador $[F(gl_{efecto}, gl_{error})]$ bajo los supuestos de normalidad, homocedasticidad e independencia.

Para cualquiera de los efectos (principales y de interacción) $E(MC_{error}) = \sigma^2_{error}$, dado que cuando la H_0 es cierta tanto las medias cuadráticas del efecto como la del error son estimaciones independientes del error experimental. Por consiguiente, cada efecto principal y de interacción utiliza su propia MC pero la MC_{error} de la Ecuación 7.15 es idéntica para todos.

7.6 Análisis de la interacción

La prueba anterior en donde se evaluó la significatividad de los efectos principales y la interacción entre factores se conoce como prueba ómnibus (global) debido a que no diferencia entre niveles, esto es, el efecto de un factor principal con tres niveles puede ser significativo según el test anterior pero éste no nos indicará si las tres comparaciones posibles entre niveles son todas ellas significativas o solo lo son un subconjunto de las mismas.

Una vez realizada la prueba ómnibus, el siguiente paso es comprobar si el efecto de interacción resulta significativo. La secuencia lógica de análisis sería la que se muestra en el diagrama de flujo de la Figura 7.5

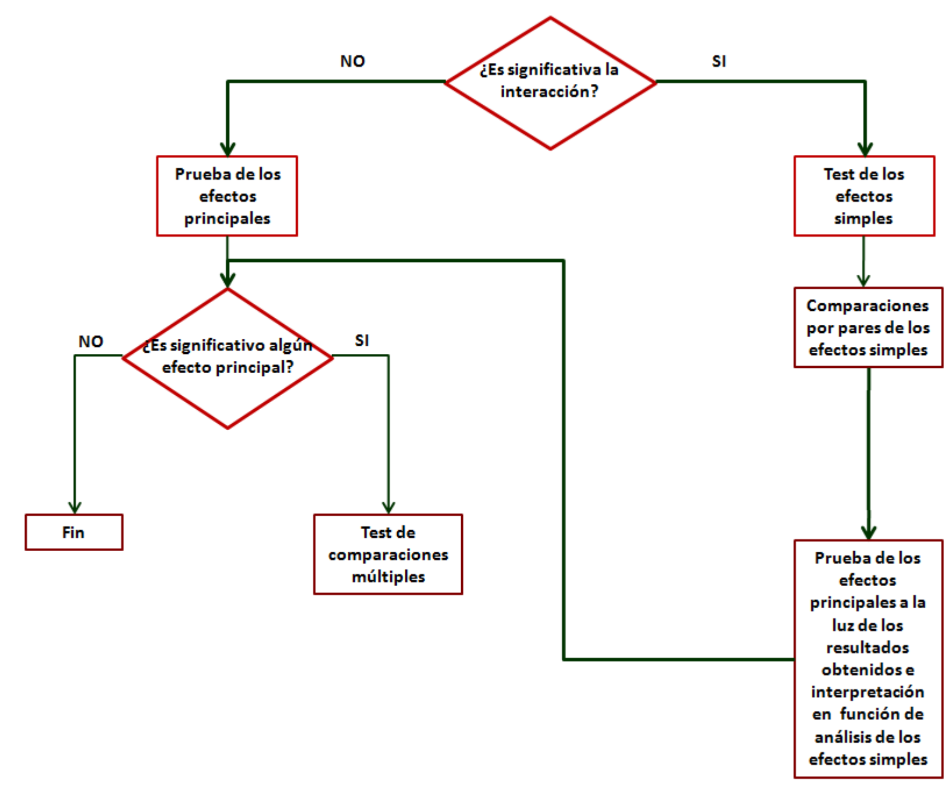


Figura 7.5 *Secuencia de análisis en un diseño factorial*

El que el efecto de interacción sea significativo, no supone que no prestemos atención a los efectos principales, sólo que su interpretación, caso de resultar significativos, debe hacerse, como señala el diagrama, teniendo en cuenta los resultados obtenidos en el análisis de los efectos simples, y sobre todo el marco teórico en el que se desarrollan las hipótesis de investigación. No obstante, como ya hemos mencionado, en este capítulo sólo nos interesaremos por el análisis de la interacción.

Retomando nuestro ejemplo, comenzaremos por el contraste de los efectos simples, y para ello seguiremos la lógica de razones básicas que hemos utilizado en el ANOVA. Para este análisis partimos de la matriz AB, que contiene las sumas de las puntuaciones de los tratamientos. En la Tabla 7.5 reflejamos esta matriz para los datos que nos sirven de ejemplo. La manera de enfocar este análisis es convertir cada columna o fila de la matriz AB en un diseño de un solo factor y luego obtener las sumas de cuadrados entre grupos del mismo modo que ha hecho con las sumas de cuadrados de los efectos principales.

Tabla 7.5 *Matriz AB datos del ejemplo*

Matriz AB

	Factor A			
Factor B	**a_1 (zona alta)**	**a_2 (zona media)**	**a_3 (zona deprimida)**	**Suma**
b_1 (5 h.)	165	150	100	415
b_2 (10 h.)	175	150	200	525
b_3 (15 h.)	190	185	260	635
Suma	530	485	560	1575

En el caso de los efectos principales del factor A, las dos razones básicas para el cálculo de la SC_A, son:

$$[A] = \frac{\sum A_i^2}{(b)(n)}$$

$$[T] = \frac{T^2}{(a)(b)(n)}$$

Y el resultado era $SC_A = [A]-[T]$. Siguiendo esta lógica, la suma de cuadrados del factor A en el nivel b_1 del factor B es:

$$[A\ en\ b_1] = \frac{\sum AB_{i1}^2}{n}$$

$$[B_1] = \frac{B_1^2}{(a)(n)}$$

Siendo entonces $SC_{A\ en\ b_1} = [A\ en\ b_1] - [B_1]$, y sus grados de libertad son a-1. Las medias cuadráticas para los efectos simples se obtienen de la misma manera que en el análisis general, dividiendo la suma de cuadrados por los grados de libertad. El denominador de la F es la media cuadrática intra-grupos del análisis general, es decir

$$F = \frac{MC_{A\ en\ b_1}}{MC_{S/AB}}$$

Del mismo modo se calcularían los efectos simples para el factor B en relación a los niveles del factor A, siempre que se cumpla el supuesto de homocedasticidad. Si no se cumple el supuesto de homocedasticidad, una solución es realizar tantos análisis como efectos simples hay, tomando como media cuadrática error sólo la de las observaciones implicadas en cada uno de los análisis.

Veamos, en primer lugar cómo se realizan los cálculos para obtener las sumas de cuadrados de los efectos simples del factor A en el nivel b_1 del factor B, y del Factor B en el nivel a_2 del factor A.

$$SC_{A\ en\ b_1} = \frac{\sum AB_{i1}^2}{n} - \frac{B_1^2}{(a)(n)} = \frac{(165)^2 + (150)^2 + (100)^2}{5} - \frac{415^2}{(3)(5)} = 463{,}33$$

$$SC_{B\ en\ a_2} = \frac{\sum AB_{2j}^2}{n} - \frac{A_2^2}{(b)(n)} = \frac{(150)^2 + (150)^2 + (185)^2}{5} - \frac{485^2}{(3)(5)} = 163{,}33$$

Al haber tres niveles por factor, los grados de libertad serán 2 (a – 1 y b – 1) para ambas sumas de cuadrados y las medias cuadráticas serán el resultado del cociente entre las SC y sus grados de libertad. En la Tabla 7.6 se refleja el resultado del contraste para todos los efectos simples, con su significación estadística señalada con un asterisco en la columna de la derecha (es decir, en vez de poner el valor concreto de p, si este valor para la F correspondiente es menor o igual al nivel de significación, se señala mediante un asterisco y en caso contrario se deja sin poner nada).

Tabla 7.5 *Tabla resumen ANOVA con los resultados de los efectos principales y los efectos simples*

FV	SC	gl	MC	F	Sig.
SC_A	190	2	95	1,621	
SC_B	1613,33	2	806,667	13,763	**
SC_{AB}	1226,67	4	306,667	5,232	**
SC_{AB1}	463,33	2	231,667	3,953	**
SC_{AB2}	250	2	125	2,133	
SC_{AB3}	703,33	2	351,667	6	**
SC_{BA1}	63,33	2	31,667	0,540	
SC_{BA2}	163,33	2	81,667	1,393	
SC_{BA3}	2613,33	2	1306,667	22,294	**
$SC_{S/AB}$	2110	36	58,611		

SC$_T$	5140	44

Los efectos principales de un factor son independientes del efecto de interacción (es decir, son ortogonales), pero los efectos simples del factor A no son independientes ni de los efectos principales del Factor A ni de su interacción con el factor B, de hecho su suma es igual a la suma de los efectos principales y la interacción (lo mismo sucede con los efectos simples del factor B):

$$\sum SC_{A\ en\ b_j} = SC_A + SC_{AxB}$$ Ecuación 7.15

Con los datos de la Tabla 7.5 se comprueba esa dependencia (hay una desigualdad de una centésima por efecto del redondeo):

463,33 + 250 + 703,33 = 190 + 1226,67 = 1416,67

Los resultados de la Tabla 7.5 están en sintonía con lo señalado más arriba acerca de lo que permitían intuir los gráficos de medias. El efecto principal del Factor A no es significativo, pero los gráficos señalaban que esa falta de efecto no se producía en alguno de los niveles del factor B. De hecho, hay dos efectos simples del factor A significativos (concretamente, en los niveles b_1 y b_3). También hay una diferencia entre los efectos principales del factor B y sus efectos simples. Los efectos principales son ampliamente significativos, y de hecho (como señalamos anteriormente) el test de comparaciones múltiples (no realizado, pero sugerido para que el estudiante lo desarrolle) refleja diferencias significativas entres los tres niveles del factor, y sin embargo, en los efectos simples, sólo en el nivel a_3 se producen diferencias significativas, lo que implica que ese nivel capitaliza todas las diferencias reflejadas en el efecto principal. El valor teórico de referencia (la F crítica) para las comparaciones[2] simples es $F_{(0,05;2;36)} = 3{,}259$ (véanse la Figura 7.6a y b).

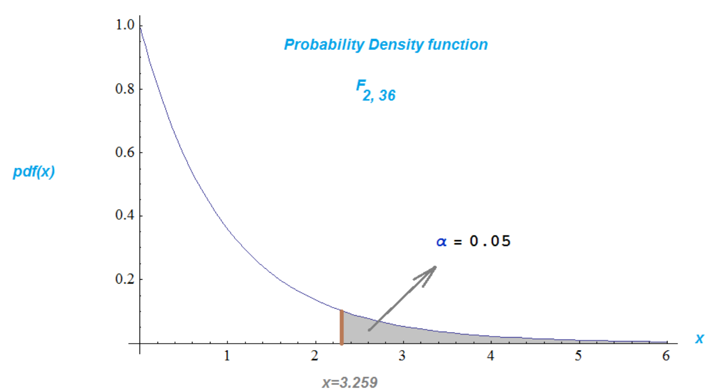


Figura 7.6a: valor crítico de la F con 2 y 36 grados de libertad ($\alpha = 0.05$). Este valor ha sido calculado con un *software* científico.

[2] Aunque muchos metodólogos han introducido técnicas para el control de la tasa de error, la práctica actual de la investigación en psicología se decanta por el análisis sin la corrección para esta tasa, por lo que el valor de α en estos contrastes es de 0,05, que es el que utilizan la mayor parte del software de análisis estadístico

n_2	1	2	3
1	161,448	199,500	215,707
2	18,513	19,000	19,164
3	10,128	9,552	9,277
4	7,709	6,944	6,591
5	6,608	5,786	5,409
6	5,987	5,143	4,757
7	5,591	4,737	4,347
8	5,318	4,459	4,066
9	5,117	4,256	3,863
10	4,965	4,103	3,708
11	4,844	3,982	3,587
12	4,747	3,885	3,490
13	4,667	3,806	3,411
14	4,600	3,739	3,344
15	4,543	3,682	3,287
16	4,494	3,634	3,239
17	4,451	3,592	3,197
18	4,414	3,555	3,160
19	4,381	3,522	3,127
20	4,351	3,493	3,098
30	4,171	3,316	2,922
60	4,001	3,150	2,758
120	3,920	3,072	2,680

Figura 7.6b: búsqueda en las tablas del valor crítico de F para 2 y 36 grados de libertad. Como no tenemos la fila de n_2 = 36, elegimos el valor más cercano (n_2 = 30).

Siguiendo la secuencia del diagrama de la figura 7.4, pasaríamos a efectuar las comparaciones por pares dentro de los niveles donde se han detectado diferencias significativas. Por su complejidad, en este libro no abordaremos los contrastes de la interacción.

7.6.1 Comparaciones por pares dentro de los efectos simples

El procedimiento es el mismo al ya visto en el capítulo 5, y los desarrollaremos con los datos del ejemplo, sólo para aquellos efectos simples que han resultado significativos, el factor A en los niveles b_1 y b_3 y el factor B en el nivel a_3. En la Tabla 7.6 hemos reflejado las medias para los niveles significativos y los coeficientes para los contrastes que habría que realizar para las comparaciones que nos resultan interesantes teóricamente. Para el factor A hemos comparado los niveles a_1 vs. a_3 y a_2 vs. a_3 en b_1 por un lado y a_2 vs. a_3 en b_3 por el otro. En el factor B hemos realizado las tres comparaciones binarias posibles, es decir, b_1 vs. b_2, b_1 vs. b_3 y b_2 vs. b_3 en a_3.

Tabla 7.6 *Medias de las celdas a comparar y coeficientes de los contrastes*

	a_1 (zona alta)	**a_2 (zona media)**	**a_3 (zona deprimida)**
$\bar{Y}_{A_i}\ en\ b_1$	33	30	20
$\bar{Y}_{A_i}\ en\ b_3$	38	37	52
$H_0: \mu_{A_{1(b1)}} - \mu_{A_{3(b1)}} = 0$	1	0	-1
$H_0: \mu_{A_{2(b1)}} - \mu_{A_{3(b1)}} = 0$	0	1	-1
$H_0: \mu_{A_{1(b3)}} - \mu_{A_{3(b3)}} = 0$	1	0	-1

	b_1 5 h.	**b_2 10 h.**	**b_3 15 h.**
$\bar{Y}_{B_j}\ en\ a_3$	20	40	52
$H_0: \mu_{B_{1(a3)}} - \mu_{B_{2(a3)}} = 0$	1	-1	0
$H_0: \mu_{B_{1(a3)}} - \mu_{B_{3(a3)}} = 0$	1	0	-1
$H_0: \mu_{B_{2(a3)}} - \mu_{B_{3(a3)}} = 0$	0	1	-1

En el efecto simple del factor A sólo se realiza un contraste entre la media mayor, 52, en el nivel a_3, y la segunda mayor, 38, en el nivel a_1 en b_3. La razón de hacer un solo contraste en este caso es que entre las medias de los niveles a_1 y a_2 hay una diferencia de un punto (de 37 a 38) y claramente no resultará significativa dicha diferencia de modo que solo se realizan para las dos medias mencionadas. Además, en el caso de ser significativa la diferencia también lo será la que hay entre a_3 y a_2, dado que la media en este nivel en un punto inferior a la de a_1.

La fórmula para la comparación ya la conocemos del capítulo 5, y es

$$SC_{A_{comp.}} = \frac{n(\hat{\psi})^2}{\sum c_i^2}$$

Y aplicada para un efecto simple es

$$SC_{A_{comp.}en\,bj} = \frac{n\left(\hat{\psi}_{A\,en\,bj}\right)^2}{\sum c_i^2}$$

Donde $\hat{\psi}_{A\,en\,bj}$ se refiere a las diferencias entre las dos medias especificadas en cada contraste, cuya expresión es:

$$\hat{\psi}_{A\,en\,b1} = \sum (c_i)\left(\bar{Y}_{A_iB_1}\right)$$

Aplicado al contraste del factor A, se tiene:

$$\hat{\psi}_{A_{1-3}\,en\,b1} = (1)(33) + (0)(30) + (-1)(20) = 13$$

Luego las sumas de cuadrados correspondientes serán:

$$SC_{A_{1-3}\,en\,b1} = \frac{5(13)^2}{(1)^2 + (0)^2 + (-1)^2} = 422{,}5$$

El número de grados de libertad para la comparación es 1, pues se están comparando solo dos niveles, y la para el cálculo de la razón F el divisor es la media cuadrática error de la prueba ómnibus $\left(MC_{S/AB}\right)$. Por lo tanto su valor es:

$$F_{A_{1-3}\,en\,b1} = \frac{422{,}5}{58{,}611} = 7{,}208$$

Y al ser la F crítica con 1 y 36 grados de libertad igual a 4,11 [$F_{(0{,}05;1;36)} = 4{,}11$] inferior al obtenido, la comparación resulta significativa, y, por consiguiente, también lo será con la media del nivel a_2. Para el otro contraste del factor A, y los tres contrastes del factor B, las diferencias entre medias para cada contraste son:

$$\hat{\psi}_{A_{2-3}\,en\,b1} = (0)(33) + (1)(30) + (-1)(20) = 10$$

$$\hat{\psi}_{A_{1-3}\,en\,b3} = (1)(38) + (0)(37) + (-1)(52) = -14$$

$$\hat{\psi}_{B_{1-2}\,en\,a3} = (1)(20) + (-1)(40) + (0)(52) = -20$$

$$\hat{\psi}_{B_{1-3}\,en\,a3} = (1)(20) + (0)(40) + (-1)(52) = -32$$

$$\hat{\psi}_{B_{2-3}\ en\ a3} = (0)(20) + (1)(40) + (-1)(52) = -12$$

Y las sumas de cuadrados

$$SC_{A_{2-3}.en\ b1} = \frac{5(10)^2}{(0)^2 + (1)^2 + (-1)^2} = 250$$

$$SC_{A_{1-3}.en\ b3} = \frac{5(-14)^2}{(1)^2 + (0)^2 + (-1)^2} = 490$$

$$SC_{B_{1-2}.en\ a3} = \frac{5(-20)^2}{(1)^2 + (-1)^2 + (0)^2} = 1000$$

$$SC_{B_{1-3}.en\ a3} = \frac{5(-32)^2}{(1)^2 + (0)^2 + (-1)^2} = 2560$$

$$SC_{B_{2-3}.en\ a3} = \frac{5(-12)^2}{(0)^2 + (1)^2 + (-1)^2} = 360$$

Y, por último, las razones F son[3]:

$$F_{A_{2-3}\ en\ b1} = \frac{250}{58{,}611} = 4{,}265$$

$$F_{A_{1-3}\ en\ b3} = \frac{490}{58{,}611} = 8{,}360$$

$$F_{B_{1-2}\ en\ a3} = \frac{1000}{58{,}611} = 17{,}062$$

$$F_{B_{1-3}\ en\ a3} = \frac{2560}{58{,}611} = 43{,}678$$

$$F_{B_{2-3}\ en\ a3} = \frac{360}{58{,}611} = 6{,}142$$

[3] El paso intermedio, calcular las medias cuadráticas, no es necesario pues es el mismo valor que las sumas de cuadrados, dado que al ser la comparación entre dos grupos los grados de libertad son siempre igual a 1

Al ser el valor teórico de F el mismo que calculamos previamente [$F_{(0,05;1;36)} = 4{,}11$], los cinco contrastes resultan significativos (aunque el de los tratamientos a_2 y a_3, dentro del nivel b_1, está muy próximo al valor teórico, razón por la cual habría que considerar este resultado con cautela).

7.6.2 ¿Cómo se actúa cuando no es significativo el efecto de interacción?

Cuando se analiza un diseño factorial, se hace la prueba ómnibus para los efectos principales y el efecto de interacción. Si ésta última no es significativa, es preciso rehacer el análisis focalizándolo sólo sobre los efectos principales. Esto tiene consecuencias en la tabla del ANOVA, en el sentido de que aumenta la suma de cuadrados del error en la misma cuantía que la suma de cuadrados de la interacción, y también los grados de libertad en la misma cuantía que los grados de libertad del efecto de interacción. La consecuencia es que el valor de la F del contraste se reduce, por el aumento que se da en el valor de la media cuadrática del error. En la tabla 7.6 se puede ver la tabla resumen del ANOVA con el efecto de interacción incluido y la misma sin el efecto de interacción.

Tabla 7.6 (a) *Tabla resumen ANOVA con efecto de interacción*

FV	SC	gl	MC	F	Sig.
SC_A	190	2	95	1,621	
SC_B	1613,33	2	806,667	13,763	**
SC_{AB}	1226,67	4	306,667	5,232	**
$SC_{S/AB}$	2110	36	58,611		
SC_T	5140	44			

Tabla 7.6 (a) *Tabla resumen ANOVA sin efecto de interacción*

FV	SC	gl	MC	F	Sig.
SC_A	190,000	2	95,000	1,139	
SC_B	1613,333	2	806,667	9,670	**
$SC_{S/AB}$	3336,67	40	83,417		
SC_T	5140,000	45			

Cuando el efecto de interacción no forma parte del modelo, el valor de la suma de cuadrados de error es igual a la suma de cuadrados error cuando entra la interacción y la suma de cuadrados de la interacción. Observe que 3336,67 = 2110 + 1226,67 y los grados de libertad 40 = 36 + 4. Los valores de F para los efectos principales son inferiores, por el aumento de la media cuadrática del error que pasa de 58,611 a 83,417.

7.7 Resumen

En este capítulo hemos visto el procedimiento de análisis de los diseños factoriales de 2 factores completamente aleatorizados, que son útiles por la economía de sujetos que supone y el número de contrastes que se pueden realizar con un conjunto no muy grande de datos.

Todos los diseños factoriales se pueden descomponer en un conjunto de efectos mutuamente independientes: los denominados efectos principales de cada factor y los efectos de interacción entre los factores. Los dos primeros son los efectos de los tratamientos de cada factor con independencia del otro factor, mientras los segundos son los efectos que se producen por el cruce de los factores

En el proceso de análisis, la prueba ómnibus informa de la significación estadística tanto de los efectos principales como de los de la interacción. Si los primeros son significativos, se procede a las comparaciones múltiples entre los tratamientos. Si son los segundos significativos, es preciso analizar cuáles de los diferentes efectos simples que explican este efecto.

En el procedimiento de análisis de los efectos simples es muy similar al seguido para un diseño de un solo factor completamente aleatorizado. El total de efectos simples no son independientes de los efectos principales ni de los efectos de interacción, más bien estos dos efectos están contenidos en el conjunto de efectos simples.

Por último, una vez determinados qué efectos simples son los que resultan significativos, hemos realizado las comparaciones múltiples en ellos para determinar entre qué tratamientos se producen las diferencias que explican la significación estadística del efecto simple.

7.8 Ejercicios de autoevaluación

Supongamos "**el nivel de aspiración**" como variable dependiente en un experimento, en el que la tarea experimental consiste en un juego aparentemente difícil que implica ciertas habilidades motoras y en el que se da una puntuación según la ejecución del sujeto. No obstante, es todo apariencia y en realidad el sujeto desconoce que el juego está bajo control del experimentador, de tal modo que a cada sujeto se le otorga siempre la misma puntuación. Después de un número de ensayos determinado, durante el cual el sujeto recibe la puntuación pre-asignada, se le pide al sujeto que prediga la puntuación para el próximo grupo de ensayos. No obstante, antes de efectuar la predicción, se "informa" al sujeto sobre la puntuación obtenida comparándola con un grupo de referencia ficticio. En una condición experimental (Factor B), al sujeto se le dice que su puntuación está por *encima del promedio (b1)* del grupo de referencia; en la segunda se le dice que está *en el promedio* (b2), y en la tercera que está por *debajo del promedio (b3)*. Además, hay dos grupos de referencia con los que comparar a los sujetos (Factor A): el primer grupo de es *varones universitarios (a1)* y el segundo es de *atletas profesionales (a2)*.

La variable dependiente que se registró es la puntuación que el sujeto predice que va a obtener en el siguiente conjunto de ensayos, y es esta puntuación la que se toma como una cuantificación de su nivel de aspiración. Cada sujeto fue entrevistado por separado y no se permitía la comunicación con los otros sujetos hasta que no acabó el experimento. Se asignó 10 sujetos a cada grupo de forma aleatoria, y las puntuaciones predichas por ellos fueron las siguientes:

a1			a2		
b1	b2	b3	b1	b2	b3
52	28	15	38	43	23
48	35	14	42	34	25
43	34	23	42	33	18
50	32	21	35	42	26
43	34	14	33	41	18
44	27	20	38	37	26
46	31	21	39	37	20
46	27	16	34	40	19
43	29	20	33	36	22
49	25	14	34	35	17

7.8.1 Preguntas

1. En el diseño planteado sólo una de las siguientes tres afirmaciones es cierta:
    a. Los dos efectos principales son significativos
    b. Sólo el efecto principal del Factor B es significativo
    c. Son significativos el efecto principal del factor B y el efecto de interacción (*)
2. El resultado de la razón básica [AB] para el cálculo de las sumas de cuadrados es.
    a. 66228,8 (*)
    b. 54789,5
    c. 45791,9
3. El valor de la razón F para contrastar el efecto principal del factor A es:
    a. 34,007
    b. 0,358 (*)
    c. 4,574
4. El valor de La Media Cuadrática Error $\left(MC_{S/AB}\right)$ es:
    a. 11,911 (*)
    b. 25,346
    c. 4,225
5. ¿Cuántos efectos simples hay en este diseño?
    a. 6
    b. 5 (*)
    c. 4

6. ¿Cuál es el valor de la F teórica con el que comparar el valor razón F obtenida en el contraste de la interacción?
   a. 3,168 (*)
   b. 4,019
   c. 5,346
7. ¿Cuál es el valor de la F observada para el contraste de la interacción?
   a. 34,007 (*)
   b. 2,356
   c. 8,254
8. De todos los efectos simples posibles, ¿cuántos de ellos resultan ser estadísticamente significativos?
   a. Dos
   b. Tres
   c. Todos (*)
9. De las tres afirmaciones siguientes, sólo una es cierta en diseño factorial completamente aleatorizado
   a. Los efectos simples son independientes de los efectos de interacción
   b. Las sumas de cuadrados de todos los efectos simples es igual a la variabilidad total del sistema (es decir, a la suma de cuadrados total)
   c. Los efectos principales de cada factor y los efectos de interacción son ortogonales, en el sentido de que aportan información independiente. (*)
10. La suma de las sumas de cuadrados de todos los efectos simples del Factor A, vale en total
   a. 814,4 (*)
   b. 5804,27
   c. 810,13

7.8.2 Soluciones ejercicios de autoevaluación

Comencemos con algunas tablas intermedias, tanto de los datos como de las matrices AB, una con los sumatorios y otra con las medias (resaltado en negrilla estás las diferentes respuestas con resultados numéricos)

	Varones Universitarios			Atletas profesionales		
	a_1			a_2		
	Encima del promedio	En el promedio	Debajo del promedio	Encima del promedio	En el promedio	Debajo del promedio
	b_1	b_2	b_3	b_1	b_2	b_3
	52	28	15	38	43	23
	48	35	14	42	34	25
	43	34	23	42	33	18
	50	32	21	35	42	26
	43	34	14	33	41	18
	44	27	20	38	37	26
	46	31	21	39	37	20
	46	27	16	34	40	19
	43	29	20	33	36	22
	49	25	14	34	35	17
Media	46,4	30,2	17,8	36,8	37,8	21,4
Suma	464	302	178	368	378	214

Matriz AB de sumas			
	a_1	a_2	Suma
b_1	464	368	832
b_2	302	378	680
b_3	178	214	392
Suma	944	960	1904

Matriz AB de Medias			
	a_1	a_2	Medias
b_1	46,400	36,800	41,600
b_2	30,200	37,800	34,000
b_3	17,800	21,400	19,600
Medias	31,467	32,000	31,733

Razones Básicas

$$[\boldsymbol{T}] = \frac{11904^2}{(2)(3)(10)} = \boldsymbol{60420,2667}$$

$$[\boldsymbol{Y}] = 52^2 + 48^2 \dots + 22^2 + 17^2 = \boldsymbol{66872}$$

$$[\boldsymbol{A}] = \frac{944^2 + 960^2}{(3)(10)} = \mathbf{60424,5333}$$

$$[\boldsymbol{B}] = \frac{832^2 + 680^2 + 392^2}{(2)(10)} = \mathbf{65414,4}$$

$$[\boldsymbol{AB}] = \frac{464^2 + 368^2 + \cdots + 178^2 + 214^2}{(10)} = \mathbf{66228,8}$$

A partir de estas razones se construye la siguiente tabla resumen de ANOVA, en donde ya hemos incorporado los efectos simples.

FV	SC	gl	MC	F	$F_{teór}$	Sig.
SC_A	4,267	1	4,267	0,358	4,020	
SC_B	4994,133	2	2497,067	209,642	3,168	***
SC_{AB}	810,133	2	405,067	34,007	3,168	***
SC_{AB1}	460,800	1	460,800	38,687	4,020	***
SC_{AB2}	288,800	1	288,800	24,246	4,020	***
SC_{AB3}	64,800	1	64,800	5,440	4,020	***
SC_{BA1}	4113,867	2	2056,933	172,690	3,168	***
SC_{BA2}	1690,400	2	845,200	70,959	3,168	***
$SC_{S/AB}$	643,200	54	11,911			
SCT	6451,733	59				

*** Estadísticamente significativos con probabilidad p < 0,05

El cálculo para, por ejemplo, la suma de cuadrados de uno de los efectos principales sería:

$$SC_{AB1} = \frac{464^2 + 368^2}{10} - \frac{832^2}{(2)(10)} = \mathbf{460,800}$$

7.8.3 Respuestas

1. C
2. A
3. B
4. A

5. B (desde SC_{AB1} a SC_{BA2})
6. C
7. A
8. C
9. C (Sólo los efectos principales y la interacción son independientes)
10. A (460,800 + 288,800 + 64,800 = 814,400)